PEMODELAN MATEMATIKA *SAI* DAN SIMULASI MODEL PADA PENYEBARAN PENYAKIT HIV-AIDS

ABRAHAM[1] DAN TIKU TANDIANGNGA[2]
[1,2] Staf Pengajar Jurusan Matematika Universitas Cenderawasih
Email: [1]m1cb_buper@yahoo.co.id; [2]tiku.tandiangnga@ymail.com

ABSTRAK

Human Immunodificiency Virus (HIV) merupakan virus penyebab penyakit *Acquired Immunodeficiency Syndrome (AIDS).* Virus ini mengakibatkan turunnya fungsi kekebalan tubuh manusia. Penyakit AIDS merupakan salah satu penyakit yang menjadi perhatian serius dari berbagai pihak dikarenakan proses penyebarannya yang sangat cepat melalui berbagai proses penularan dan salah satu proses penularan yang cenderung semakin tinggi adalah melalui hubungan seksual.

Model matematika merupakan suatu representasi dari suatu persamaan atau sekumpulan persamaan yang mengungkapkan perilaku suatu sistem. Dalam penelitian ini, diasumsikan bahwa populasi manusia dibagi dalam tiga sub populasi yaitu sub populasi *Susceptible,* Sub populasi *Infected* dan sub populasi *Abstain.* Sub populasi *Susceptible* merupakan sub populasi yang terdiri dari individu-individu yang rentan terhadap penyakit (S), Sub Populasi *Abstain* merupakan sub populasi yang terdiri dari individu-individu yang memisahkan diri dari aktifitas yang dapat menyebabkan terjangkitnya penyakit HIV (A) dan Sub populasi *Infected* merupakan sub populasi yang terdiri dari individu-individu yang telah terinfeksi penyakit (I). Dari model yang terbentuk diperoleh dua titik tetap yaitu titik tetap bebas penyakit (T_1) dan titik tetap endemik (T_2).

Dalam penelitian ini, diperoleh hasil simulasi yang menjelaskan bahwa sub populasi yang terdiri dari individu-individu yang memisahkan diri dari aktivitas yang dapat menyebabkan terjangkitnya penyakit HIV dapat memperlambat atau menurunkan pertumbuhan eksponensial dari total populasi. Dalam beberapa kondisi parameter, sub populasi yang terdiri dari individu-individu yang memisahkan diri dari aktivitas yang dapat menyebabkan terjangkitnya penyakit HIV dapat menghilangkan penyakit dalam kurun waktu tertentu sekaligus menjaga populasi yang sehat tetap pada tingkat yang positif.

PENDAHULUAN

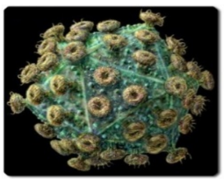
Human Immunodeficiency Virus (HIV) merupakan retrovirus yang menjangkiti sel-sel kekebalan tubuh manusia (terutama CD4 positive T-sel dan *macrophages*-komponen-komponen utama sistem kekebalan sel), dan menghancurkan atau mengganggu fungsinya. Infeksi ini mengakibatkan terjadinya penurunan sistem kekebalan yang terus menerus, yang akan mengakibatkan defisiansi kekebalan tubuh. Sedangkan *Acquired Immunodeficiency Syndrome* (AIDS) menggambarkan berbagai gejala dan infeksi yang terkait dengan menurunnya sistem kekebalan tubuh. Sistem dianggap defisien ketika sistem tersebut tidak dapat lagi menjalankan fungsinya memerangi infeksi dan penyakit-penyakit. Orang yang kekebalan tubuhnya defisien (*immunodeficient*) menjadi lebih rentan terhadap berbagai ragam infeksi, yang sebagian besar jarang menjangkiti orang yang tidak mengalami defisiensi kekebalan. HIV/AIDS merupakan salah satu masalah kesehatan masyarakat yang memerlukan perhatian khusus, hal ini dapat dilihat dari tingginya jumlah kasus HIV/AIDS yang tiap tahunnya meningkat tanpa diimbangi dengan pertumbuhan populasi yang terjadi.

Dengan melihat proses penularan virus HIV yang saat ini, masih lebih dominan terhadap kelompok usia produktif yaitu dengan pola perilaku yang berisiko seperti seks bebas yang tidak aman dan penggunaan narkoba melalui jarum suntik, dengan hubungan seksual (baik heteroseksual maupun homoseksual) sangat mendominasi yaitu mencapai 60%. Sedangkan melalui jarum suntik sekitar 30%, dan sebagian kecil lainnya yang tertular melalui proses ibu dan anak (kehamilan) dan transfusi darah.

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah untuk menggambarkan model matematika *SIA* terhadap penyebaran penyakit HIV/AIDS serta melakukan analisis kestabilan dari model tersebut terhadap kasus penyebaran penyakit HIV/AIDS.

Karakteristik Virus HIV

Virus (bahasa latin yang artinya toxin atau racun) adalah suatu partikel submikroskopik (ukurannya berkisar antara 15-600 nm) yang dapat menginfeksi sel dari suatu organisme biologis. Mengandung inti dari DNA / RNA.



Gambar 1. Virus HIV

HIV merupakan jenis virus yang melemahkan sistem kekebalan tubuh manusia dengan cara menempel dan merusak sel-sel darah putih tertentu (sel T dan CD-4). Sel T dan sel CD-4 sangat penting dalam sistem kekebalan tubuh. HIV dapat tetap hidup dalam tubuh selama bertahun-tahun dan pada akhirnya HIV melemahkan sistem kekebalan tubuh sehingga tubuh tidak mampu lagi melawan infeksi yang ditimbulkan oleh virus lainnya. Selama ini pengobatan dilakukan hanya untuk memperlambat atau menghentikan proses tersebut namun belum bisa menyembuhkan penderita yang terkena virus HIV tersebut.

Sistem Persamaan Linear

Persamaan linear dengan n peubah $x_1, x_2, \dots, x_n$ didefinisikan sebagai suatu persamaan yang dinyatakan dalam bentuk

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b,$$

dengan $a_1, a_2, \dots, a_n$ dan b adalah konstanta real.

Sebuah himpunan berhingga dari persamaan linear dalam peubah-peubah $x_1, x_2, \dots, x_n$ dinamakan sistem persamaan linear atau sistem linear. Barisan bilangan $s_1, s_2, \dots, s_n$ dinamakan solusi sistem tersebut jika $x_1 = s_1, x_2 = s_2, \dots, x_n = s_n$ merupakan solusi dari setiap permasalahan dalam sistem tersebut.

Misalkan diberikan system persamaan linier berikut

$$4x_1 - x_2 + 3x_3 = -1$$
$$3x_1 + x_2 + 9x_3 = -4$$

memiliki solusi $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -1$ karena nilai-nilai tersebut memenuhi persamaan. Tetapi $x_1 = 1, x_2 = 8, x_3 = 1$ bukan merupakan solusi karena nilai-nilai tersebut hanya memenuhi persamaan pertama dari sistem.

 ISBN 978-602-7905-39-9

Nilai Eigen

Jika A adalah sebuah matriks $n \times n$, maka sebuah vektor tak nol **x** pada $\mathbb{R}^n$ disebut vektor eigen (*eigen vector*) dari A, jika $A\mathbf{x}$ adalah sebuah kelipatan skalar dari **x**, yaitu

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

Untuk skalar sebarang λ. Skalar λ disebut nilai eigen (*eigen value*) dari A, dan **x** disebut sebagai vektor eigen dari A yang terkait dengan λ. Untuk memperoleh nilai eigen dari sebuah matriks $A_{n\times n}$, dituliskan kembali $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ sebagai $A\mathbf{x} = \lambda I\mathbf{x}$
atau secara ekuivalen,

$$(\lambda I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Persamaan ini memiliki solusi tak nol jika dan hanya jika

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

Persamaan ini disebut persamaan karakteristik matriks A, skalar-skalar yang memenuhi persamaan ini adalah nilai-nilai eigen A. Apabila diperluas lagi, $det(\lambda I - A)$ adalah sebuah polinomial dalam variabel λ yang disebut sebagai polinomial karakteristik matriks A.

Persamaan Diferensial

Definisi (Purcell, Varberg dan Rigdon, 2004)

Persamaan yang mempunyai satu atau lebih turunan dari sebuah fungsi yang tidak diketahui disebut persamaan diferensial.

Persamaan diferensial terbagi atas persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial. Jika persamaan diferensial memiliki satu peubah tak bebas, maka persamaan itu disebut persamaan diferensial biasa. Tetapi jika persamaan diferensial tersebut memiliki lebih dari satu peubah tak bebas, maka persamaan itu disebut persamaan diferensial parsial.Orde dari persamaan diferensial adalah orde dari turunan tertinggi yang terdapat dalam persamaan diferensial (Bronson dan Costa, 2007).

Suatu persamaan diferensial dikatakan linear jika tidak ada perkalian antara peubah-peubah tak bebas dengan turunan-turunannya. Bentuk umum dari persamaan diferensial linear orde n adalah

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x),$$

dengan $a_n(x) \neq 0$

(i) Jika koefisien $a_n(x)$, $a_{n-1}(x)$, $\ldots, a_1(x), a_0(x)$ merupakan fungsi konstan maka Persamaan (2.4) disebut dengan persamaan diferensial linear dengan koefisien konstan. Jika tidak maka disebut persamaan diferensial linear dengan koefisien peubah.

(ii) Jika $f(x) = 0$ maka Persamaan (2.4) disebut persamaan diferensial linear homogen.

(iii) Jika $f(x) \neq 0$ maka Persamaan (2.4) disebut persamaan diferensial linear tak homogen.

Model Matematika

Model matematika adalah suatu representasi dari suatu persamaan atau sekumpulan persamaan yang mengungkapkan perilaku suatu sistem. Model matematika merupakan suatu proses yang melalui tiga tahap yaitu perumusan model matematika, penyelesaian dan/atau analisis model matematika serta penginterpretasikan hasil ke situasi nyata.

Dalam implementasi, penggunaan model matematika terutama mengenai penyebaran virus, dicari perilaku penyebaran penyakit dan eksistensinya, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik. Titik kesetimbangn bebas penyakit adalah suatu kondisi dimana sudah tidak ada lagi virus yang menyerang dalam sel tubuh sedangkan titik kesetimbangan endemik merupakan suatu kondisi dimana virus masih ada dalam tubuh, namun jumlahnya cenderung konstan.

Model eksponensial dikaitkan dengan nama Thomas Robert Malthus (1766-1834) yang pertama kali menyadari bahwa setiap spesies berpotensi meningkat dalam jumlah secara eksponensial. Model Malthusian eksponensial yang sederhana untuk total populasi diberikan oleh

$P' = rP(t)$ dengan $r = \beta - \mu$ (1)

dimana β merupakan laju total kelahiran secara alami yang dihasilkan per satu individu yang ada pada populasi per satuan waktu dan μ merupakan probabilitas kematian per satu individu. Solusi dari Persamaan (1) adalah

$P(t) = P_0 e^{rt}$ (2)

dimana P_0 adalah total penduduk awal. Dari Persamaan (2) dapat dijelaskan 3 hal yaitu:

1. Jika $r < 0$, maka populasi $P(t)$ akan menurun secara ekponensial
2. Jika $r > 0$, maka populasi $P(t)$ akan meningkat secara eksponensial
3. Jika $r = 0$, maka populasi $P(t)$ akan konstan

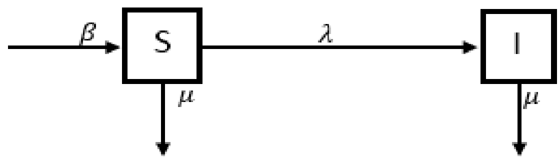
METODE PENELITIAN

Penelitian ini menggunakan metode kajian pustaka dengan penerapan dalam bidang kesehatan. Data yang digunakan dalam penelitian ini merupakan data sekunder tentang penderita HIV/AIDS yang diperoleh dari Badan Pusat Statistik (BPS) serta Komisi Penanggulangan AIDS (KPA) Provinsi Papua yang terdiri dari beberapa kabupaten.

Adapun prosedur yang dilakukan dalam penelitian ini adalah menentukan model matematika *SIA* terhadap penyebaran penyakit virus HIV serta melakukan analisis terhadap model matematika untuk kasus penyebaran penyakit virus HIV.

HASIL YANG DICAPAI

Pertumbuhan populasi dengan model eksponensial sederhana menggunakan tipe model klasik epidemi $S - I$. Selanjutnya, populasi akan dibagi menjadi dua kompartemen yaitu populasi yang sehat (*Susceptible*) dan populasi yang terinfeksi (*Infected*). Total populasi didefinisikan sebagai $P = S + I, \quad P > 0$ dan penyebaran populasi tipe $S - I$ digambarkan seperti bagan berikut:



Gambar 2. Penyebaran populasi tipe $S - I$

dimana, λ merupakan proporsi tingkat infeksi terhadap populasi yang sehat. Model matematika untuk masalah tersebut dinyatakan dalam sistem persamaan differensial sebagai berikut:

$S' = \beta(S + I) - \lambda \frac{SI}{S+I} - \mu S,$ (3)

$I' = \lambda \frac{SI}{S+I} - \mu I,$ (4)

dimana S' adalah laju perkembangan populasi terhadap waktu, hal yang sama juga untuk I'. Diketahui total populasi adalah $P = S + I$ dengan $P' = S' + I'$, sehingga diperoleh:

$P' = rP(t).$

Akibat adanya pengaruh dari populasi yang terinfeksi dapat dilihat dari dinamika untuk proporsi individu yang terinfeksi dalam populasi, yaitu: $y = \frac{I}{P}$,

 ISBN 978-602-7905-39-9

sehingga diperoleh persamaan diferensial tipe Bernoulli yaitu:

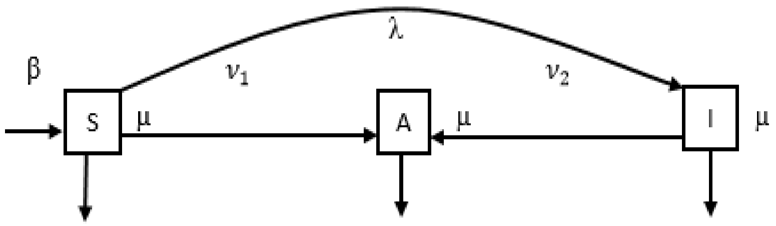
$$y' = (\lambda - \beta)y - \lambda y^2, \quad (5)$$

dengan solusi dari Persamaan (5) adalah

$$y(t) = \frac{I(t)}{P(t)} = \begin{cases} \dfrac{e^{(\lambda-\beta)t}}{\frac{\lambda}{(\lambda-\beta)}[e^{(\lambda-\beta)t}-1]+\frac{1}{y_0}}\ ; & jika\ \lambda \neq \beta \\ \dfrac{1}{\lambda t+\frac{1}{y_0}}\ ; & jika\ \ \lambda = \beta \end{cases} \quad (6)$$

Model dengan populasi Abstain

Pada bagian ini, pengembangan model dilakukan dengan menambahkan populasi yang tidak produktif yaitu populasi yang terdiri dari orang-orang yang tidak terlibat secara langsung dari aktifitas seksual baik populasi yang sehat maupun populasi yang terinfeksi sehingga tidak dapat menyebarkan penyakit. Selanjutnya, populasi dibagi menjadi tiga kompartemen yang terdiri dari populasi yang sehat (*Susceptible*), populasi yang terinfeksi (*Infected*) dan populasi yang tidak produktif (*Abstain*). Penyebaran populasi dijelaskan pada Gambar 2 berikut:



Gambar 3. Penyebaran populasi tipe $S - A - I$

dengan total populasi didefenisikan sebagai $P(t) = S(t) + I(t) + A(t), \quad P > 0$ dan dari Gambar 2 dapat dinyatakan dalam model persamaan matematika sebagai berikut:

$$S' = \beta(S+I) - \lambda\frac{SI}{S+I+A} - \mu S - \nu_1 S \quad (7)$$

$$I' = \lambda\frac{SI}{S+I+A} - \mu I - \nu_2 I \quad (8)$$

$$A' = \nu_1 S + \nu_2 I - \mu A \quad (9)$$

dimana A merupakan populasi yang tidak produktif (*Abstain*) dan ν_1 merupakan proporsi individu yang tidak terinfeksi, yang terdiri dari orang-orang yang tidak akan melakukan hubungan seksual dengan demikian tidak dapat menghasilkan keturunan serta tidak dapat menyebarkan penyakit sedangkan ν_2 merupakan proporsi individu yang terinfeksi yang terdiri dari orang-orang yang sebelumnya aktif secara seksual kemudian menahan diri dari hubungan seksual karena telah terinfeksi sehingga tidak dapat menyebarkan penyakit.

Selanjutnya, dari sistem Persamaan (7)-(9) akan diperoleh dua titik tetap yaitu $T_1(0,0,0)$ dan $T_2\left(\left[\frac{((\beta-\mu)-\nu_2)}{(\nu_1-(\beta-\mu))}\right]I^*, I^*, \left[\frac{\nu_1}{\mu}\frac{((\beta-\mu)-\nu_2)}{(\nu_1-(\beta-\mu))} + \frac{\nu_2}{\mu}\right]I^*\right)$ dengan syarat $S' = I' = A' = 0$. Dari $I' = 0$, diperoleh

$$I_* = 0 \quad \text{atau} \quad \lambda\frac{S}{P} = (\mu + \nu_2) \quad (10)$$

selanjutnya, untuk $I_* = 0$ diperoleh $S_* = 0$ atau $\beta - \mu - \nu_1 = 0$ dan dengan mensubtitusikan $\lambda\frac{S}{P} = (\mu + \nu_2)$ ke dalam Persamaan (7) diperoleh

$$((\beta - \mu) - \nu_1)S + ((\beta - \mu) - \nu_2)I = 0$$

Misalkan S^* adalah titik tetap endemik untuk S dan I^* adalah titik tetap endemik untuk I, maka

$$S^* = \left[\frac{((\beta-\mu)-\nu_2)}{(\nu_1-(\beta-\mu))}\right]I^*,$$

selanjutnya untuk titik A^* diperoleh:

$$A^* = \left[\frac{\nu_1}{\mu}\frac{((\beta-\mu)-\nu_2)}{(\nu_1-(\beta-\mu))} + \frac{\nu_2}{\mu}\right]I^* \text{ dengan}$$

$I^* > 0$,

sehingga diperoleh titik tetap positif, yaitu

$$(S^*, I^*, A^*) = \left\{\left[\frac{((\beta-\mu)-\nu_2)}{(\nu_1-(\beta-\mu))}\right]I^*, I^*, \left[\frac{\nu_1}{\mu}\frac{((\beta-\mu)-\nu_2)}{(\nu_1-(\beta-\mu))} + \frac{\nu_2}{\mu}\right]I^*\right\}$$

dimana:

ISBN 978-602-7905-39-9

1. Jika $(\beta - \mu) > max\{v_1, v_2\}$ maka $P(t) \to \infty$ artinya total pertumbuhan populasi akan menuju tak terhingga.
2. Jika $(\beta - \mu) < \min\{v_1, v_2\}$ maka $S(t) \to \infty$, $I(t) \to \infty$ artinya pertumbuhan populasi yang sehat dan yang terinfeksi akan menuju tak terhingga.
3. Jika $v_1 < (\beta - \mu) < v_2$ maka pertumbuhan total populasi akan tumbuh secara eksponensial atau akan mengalami penurunan ke nol.

Selanjutnya, akan dikaji dinamika dari proporsi masing-masing populasi terhadap populasi total sebagai berikut:

$$x = \frac{S(t)}{P(t)} \text{ dan } y = \frac{I(t)}{P(t)}.$$

sehingga diperoleh persamaan:

$$\begin{cases} x' = \beta(1-x)(x+y) - \lambda xy - v_1 x \\ y' = \lambda xy - \beta y(x+y) - v_2 y \end{cases} \quad (11)$$

Kondisi stabil dipenuhi ketika $x' = 0$ dan $y' = 0$, sehingga dari Persamaan (11), diperoleh titik tetap (x_*, y_*) sebagai titik tetap bebas penyakit yaitu:

$$(x_*, y_*) = \left(1 - \frac{v_1}{\beta}, 0\right).$$

Analisis kestabilan dapat ditentukan berdasarkan nilai eigen dari matriks Jacobian yang diperoleh melalui linearisasi. Matriks Jacobian dari Persamaan (11) sebagai berikut:

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} -2\beta x - (\lambda+\beta)y + \beta - v_1 & -(\lambda+\beta)x + \beta \\ (\lambda-\beta)y & (\lambda-\beta)x - 2\beta y - \end{pmatrix}$$

dengan mensubtitusikan $x = y = 0$ ke dalam matriks Jacobian, diperoleh

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} \beta - v_1 & \beta \\ 0 & -v_2 \end{pmatrix}$$

dengan nilai eigen $\gamma_1 = \beta - v_1$ dan $\gamma_2 = -v_2$, yang berarti bahwa jika $\beta < v_1$ maka titik kesetimbangan $(x,y) = (0,0)$ merupakan titik kestabilan lokal. Kondisi ini menyebabkan proporsi yang sehat dan yang terinfeksi akan mengalami penurunan menuju ke nol, sehingga mengakibatkan seluruh populasi $P(t)$ akan punah. Sebaliknya, untuk $\beta > v_1$ akan dianalisa pada titik stabil asimtotik dari (x_*, y_*).

Selanjutnya, untuk kasus berikut

$$x = \frac{S(t)}{P(t)} \to \left(1 - \frac{v_1}{\beta}\right) \quad \text{dan} \quad y = \frac{I(t)}{P(t)} \to 0,$$

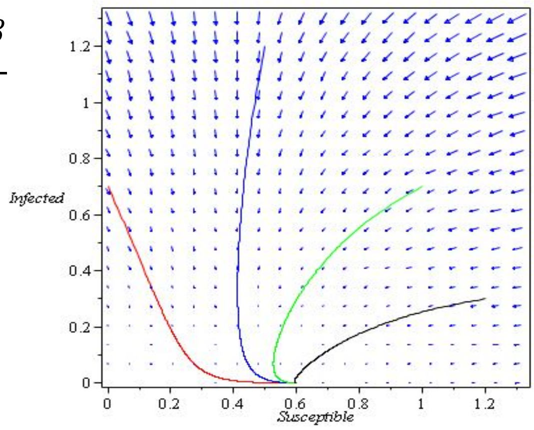
dengan menggunakan Persamaan (8) diperoleh nilai limit dari $I(t)$, berikut ini $I'(t) = \lambda \frac{SI}{P} - \mu I - v_2 I$ dimana $\frac{S(t)}{P(t)} \to 1 - \frac{v_1}{\beta}$

$$\frac{I'(t)}{I(t)} \to \lambda \frac{S}{P} - \mu - v_2$$

$$\frac{I'(t)}{I(t)} \to \lambda\left(1 - \frac{v_1}{\beta}\right) - \mu - v_2$$

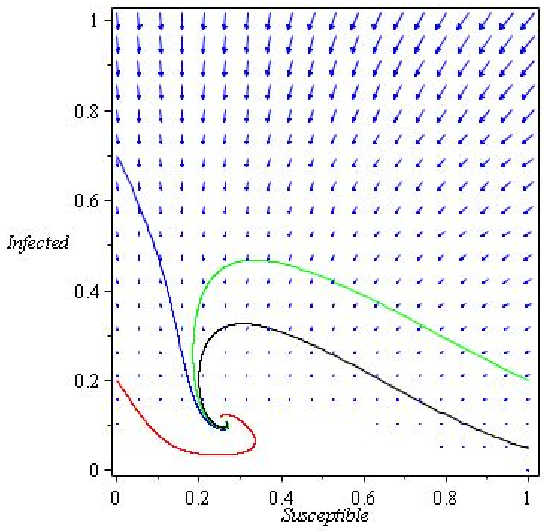
artinya bahwa ketika memenuhi kondisi $\lambda < \frac{\mu + v_2}{1 - \frac{v_1}{\beta}}$ maka pertumbuhan $I(t) \to 0$, sebaliknya ketika kondisi $\lambda > \frac{\mu + v_2}{1 - \frac{v_1}{\beta}}$ maka $I(t)$ akan tumbuh secara eksponensial dan seluruh populasi tumbuh tak terhingga. Demikian pula untuk $S(t)$, diperoleh $S'(t) = (\beta - \mu - v_1)S + \left(\beta - \lambda \frac{S}{P}\right)I$, dengan mengabaikan $\left(\beta - \lambda \frac{S}{P}\right)I$, dan pada saat kondisi $\beta - \mu > v_1$ maka pertumbuhan $S(t) \to \infty$.

Hal ini dapat dilihat pada Gambar 3 dan Gambar 4 berikut:



Gambar 3: Untuk kasus $\lambda < \frac{\beta - v_1 + v_2}{1 - \frac{v_1}{\beta}}$

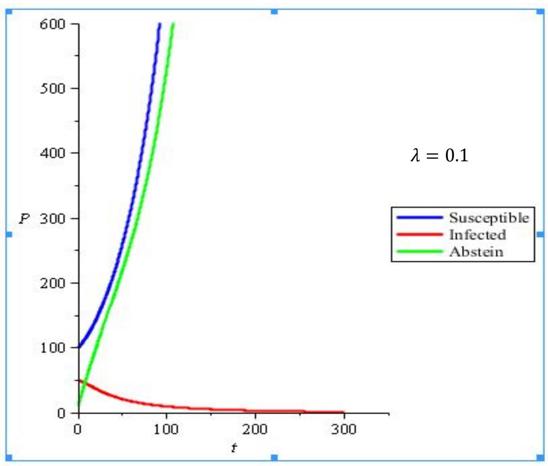
ISBN 978-602-7905-39-9



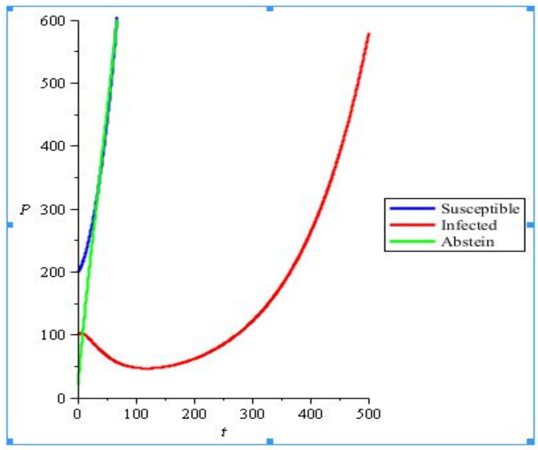
Gambar 4: Untuk kasus $\frac{\beta-\nu_1+\nu_2}{1-\frac{\nu_1}{\beta}} < \lambda$

Perhatikan bahwa kehadiran dari populasi yang memisahkan diri dalam populasi terinfeksi adalah penting dalam arti bahwa jika $\nu_2 = 0$, maka ambang batas paling kanan adalah β, yang berarti bahwa tidak ada nilai yang memungkinkan terhadap λ untuk memenuhi kestabilan dari titik kesetimbangan bebas penyakit dari Persamaan (11).

Pada Gambar 5 dan Gambar 6 ditunjukkan grafik dari S, I, dan A dengan ambang batas lainnya untuk λ yang menyebabkan populasi yang terinfeksi menurun hingga nol.



Gambar 5: Untuk kasus $\beta < \lambda < \frac{\mu+\nu_2}{1-\frac{\nu_1}{\beta}}$



Gambar 6: Untuk kasus $\frac{\mu+\nu_2}{1-\frac{\nu_1}{\beta}} < \lambda < \frac{\beta-\nu_1+\nu_2}{1-\frac{\nu_1}{\beta}}$

Pada Gambar 5 dijelaskan bahwa ketika laju total kelahiran lebih kecil dari proporsi tingkat infeksi terhadap populasi yang sehat maka mengakibatkan proporsi dari yang terinfeksi menurun hingga nol meskipun pada Gambar 6 terlihat bahwa ukuran dari populasi yang terinfeksi tumbuh secara eksponensial.

KESIMPULAN

Sebagai kesimpulan, telah ditetapkan dua batas tambahan untuk tingkat infeksi λ dimana β merupakan awal dari tingkat ambang batas terhadap penyakit untuk bertahan tanpa adanya populasi karantina, yaitu

$$\beta < \frac{\mu+\nu_2}{1-\frac{\nu_1}{\beta}} < \frac{\beta-\nu_1+\nu_2}{1-\frac{\nu_1}{\beta}}.$$

Jika $\beta < \lambda < \frac{\mu+\nu_2}{1-\frac{\nu_1}{\beta}}$ maka diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit dan pada saat kondisi $\frac{\mu+\nu_2}{1-\frac{\nu_1}{\beta}} < \lambda = 0.13 \frac{\beta-\nu_1+\nu_2}{-\frac{\nu_1}{\beta}}$, maka populasi yang terinfeksi akan tumbuh secara eksponensial hingga tak terbatas namun proporsinya dalam total populasi cenderung menuju nol.

Ketika laju total kelahiran lebih kecil dari proporsi tingkat infeksi terhadap populasi yang sehat maka mengakibatkan proporsi dari yang terinfeksi menurun hingga nol. Untuk model eksponensial,

 ISBN 978-602-7905-39-9

jika angka Malthusian $(r = \beta - \mu)$ kurang dari kedua angka isolasi (ν_1 dan ν_2), maka populasi ini secara asimptotik menjadi punah atas kurangnya reproduksi yang memadai. Demikian sebaliknya, maka total populasi tumbuh secara tak terbatas, dengan proporsi stabil dari individu-individu yang rentan dan terinfeksi. Tetapi jika angka pertumbuhan Malthusian berada di antara kedua angka isolasi, maka total populasi dapat tumbuh atau menurun secara eksponensial sampai titik punah.

UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Ketua LPPM Uncen melalui program penelitian BOPTN dengan nomor kontrak penelitian **Nomor : /BOPTN/LT/2017**

DAFTAR PUSTAKA

Abraham, dan Suparwati T., 2015. *Analisis Kestabilan Model Matematika Sederhana Terhadap Penyebaran Penyakit HIV/AIDS*. Prosiding LPPM Uncen, 2015.

Blower SM, Hartel D, et al, 1991. *Drugs, Sex and HIV: a mathematical model for New York City*. Phil Trans R. Soc Lond B 321, 171-187.

Braunm M, 1983. Differential Equations and Their Applications. New York., U.S.A,: Springer Verlag.

Boyce, W.E. Diprima, R. 1997. Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems. John Wiley and Sons, Inc. Singapore.

Chaharborj, S.S, et al., 2010. *Behavior Stability in Two SIR-Style Models for HIV*. Int. Journal of Math Analysis. 4(9): 427-434.

Daniel Maxin. And Fabio Augusto Milner, 2007. *The Effect of Nonreproductive Groups on Persistent Sexually Transmitted Diseases* . J. Math. Biosc and Engin, Vol 4, Number 3.

KPAN,2009. Komisi Penanggulangan AIDS Nasional (KPAN). 2009, Data Kasus HIV dan AIDS Indonesia. http//www.aids-ina.org.

McKendrik AG, 1926. *Application of Mathematics to Medical Problems*. Proc. Math. Soc. Endinburgh 44: 98 – 130.

Meyer, W. J., 1987. *Concepts Of Mathematical Modelling*, McGraw-Hill International Editions, New York.

Purcell, E.J. dan D. Varberg. 2010. *Kalkulus Jilid 1.* Terjemahan oleh I Nyoman Susila. Tangerang: Binarupa Aksara.