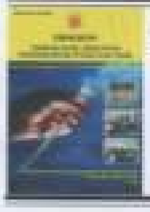

http://www.lppm.uncen.ac.id/

PROSIDING

ISBN : 978 - 602 - 7905 - 39 - 9

SEMINAR HASIL PENELITIAN PENGEMBANGAN IPTEKS DAN SAINS
Edisi Keenam, Juli 2020

Diterbitkan Oleh:
Lembaga Penelitian dan Pengabdian Kepada Masyarakat Universitas Cenderawasih

PEMODELAN MATEMATIKA PENYEBARAN PENYAKIT HIV-AIDS DENGAN PENGARUH TERAPI PADA POPULASI TERTUTUP

Oleh:

ABRAHAM & TIKU TANDIANGNGA

Staf Pengajar Jurusan Matematika Universitas Cenderawasih
Email: m1cb_buper@yahoo.co.id;

ABSTRAK

Human Immunodeficiency Virus (HIV) merupakan virus yang menyerang dan menghancurkan sistem kekebalan (imunitas) dalam tubuh manusia. Sistem kekebalan merupakan sistem pertahanan tubuh yang alami untuk melawan segala jenis infeksi dan penyakit. Acquired Immune Deficiency Syndrome (AIDS) merupakan infeksi penyakit yang menyerang sistem kekebalan tubuh yang telah rusak akibat virus HIV. Terapi ARV dapat membantu memperlambat perkembangan virus yang menyebar di dalam tubuh. Meski belum mampu menyembuhkan secara menyeluruh, namun terapi ARV menurunkan angka kematian, kesakitan, dan meningkatkan kualitas hidup ODHA. Pada penelitian ini dibahas tentang pembentukkan model matematika SIAT terhadap penyebaran HIV-AIDS, populasi dibagi menjadi empat subpopulasi, yaitu subpopulasi Susceptible (S) merupakan subpopulasi yang berisi individu-individu yang rentan terinfeksi HIV, subpopulasi Infected (I) merupakan subpopulasi yang berisi individu-individu yang terinfeksi HIV, subpopulasi Aids Cases (A) merupakan subpopulasi yang berisi individu-individu yang terjangkit penyakit AIDS, dan subpopulasi Treatment (T) merupakan subpopulasi yang berisi individu-individu yang menerima terapi. Model yang dikaji kemudian dianalisis. Langkah pertama penentuan titik ekuilibrium non endemik dan endemik. Diperoleh titik ekuilibrium non endemik yaitu $(S^*, I^*, A^*, T^*) = (\frac{\alpha}{\mu}, 0,0,0)$, *sedangkan titik ekuilibrium endemik yaitu* $(S^{**}, I^{**}, A^{**}, T^{**}) = (\frac{(\mu+\gamma)N}{\beta}, \frac{-\mu^2N-\mu\gamma N+\alpha\beta}{\beta(\mu+\gamma)}, \frac{\gamma(-\mu\gamma N-\mu^2N+\alpha\beta)}{\beta(\mu^2+\delta\mu+\omega\mu+\gamma\mu+\gamma\omega+\gamma\delta)}, \frac{\omega\gamma(-\mu\gamma N-\mu^2N+\alpha\beta)}{\beta\mu(\mu^2+\delta\mu+\omega\mu+\gamma\mu+\gamma\omega+\gamma\delta)})$. *Langkah kedua penentuan bilangan reproduksi dasar* (R_0). *Dalam penelitian ini diperoleh* $R_0 = \frac{\alpha\beta}{\mu^2N+\mu\gamma N}$. *Langkah terakhir menganalisis kestabilan lokal di sekitar titik ekuilibrium. Hasil analisis menunjukkan bahwa titik ekuilibrium non endemik (bebas penyakit) stabil asimtotik lokal saat* $\Re e(\lambda_i) < 0$, *sedangkan titik ekuilibrium endemik stabil asimtotik lokal jika* $R_0 > 1$.

Kata Kunci: *Model SIAT, HIV-AIDS, titik ekuilibrium, bilangan reproduksi dasar.*

PENDAHULUAN

Human Immunodeficiency Virus (HIV) merupakan virus yang menyerang dan menghancurkan sistem kekebalan (imunitas) dalam tubuh manusia. Sistem kekebalan merupakan sistem pertahanan tubuh yang alami untuk melawan segala jenis infeksi dan penyakit. *Acquired Immune Deficiency Syndrome* (AIDS) merupakan infeksi penyakit yang menyerang sistem kekebalan tubuh yang telah rusak akibat virus HIV.

Pemodelan matematika merupakan bidang matematika yang berusaha untuk menjelaskan masalah pada dunia real dalam pernyataan numerik. Model matematika dapat dibuat menggunakan banyaknya permasalahan yang timbul dari berbagai bidang ilmu, misalnya bidang kesehatan, kimia, fisika, biologi dan lainnya. Model matematika yang telah dibentuk akan dianalisa, agar membentuk model yang sesuai dengan permasalahan yang dibahas.

Pada bidang kesehatan, model matematika dilakukan untuk mengetahui bagaimana penyebaran penyakit menular maupun penyakit tidak menular dan bagaimana pencegahannya. Model matematika tidak berperan untuk menyembuhkan penyakit, tetapi digunakan untuk memprediksi dan pengendalian penyebaran penyakit epidemik maupun dan non-epidemik di masa yang akan datang. Epidemik adalah penyebaran penyakit tertentu pada suatu daerah dengan jumlah yang melebihi batas jumlah normal atau yang biasa. Salah satu penyakit endemik adalah AIDS.

Pemodelan matematika terhadap penyakit HIV-AIDS sudah cukup banyak dilakukan oleh para peneliti. Salah satunya jurnal yang berjudul Pemodelan Matematika dan Analisis Kestabilan Model pada Penyebaran HIV-AIDS oleh Haryanto dkk (2015). Jurnal ini membahas tentang model *SIA*. Pada model *SIA* populasi manusia dikelompokkan dalam tiga subpopulasi yaitu *Susceptible* (*S*), *Infected* (*I*), dan *Aids Cases* (*A*). Subpopulasi *susceptible* merupakan subpopulasi yang berisi individu-individu yang rentan terinfeksi HIV, subpopulasi *infected* merupakan subpopulasi yang berisi individu-individu yang terinfeksi HIV, sedangkan subpopulasi *aids cases* merupakan subpopulasi yang berisi individu-individu yang terjangkit penyakit AIDS. Untuk itu, penulis mengembangkan dengan menambahkan satu subpopulasi yaitu $Treatment$ (T). Subpopulasi $Treatment$ (T) merupakan subpopulasi yang berisi individu-individu yang mendapatkan terapi pengobatan. Selanjutnya akan dicari titik ekulibrium non endemik dan endemik dari model yang terbentuk serta akan dilakukan analisis terhadap titik ekulibrium model matematika yang dihasilkan.

HASIL DAN ANALISIS

1. Formulasi Model Penyebaran Penyakit HIV-AIDS Tipe *SIAT*

Pada model $SIAT$ populasi dibagi menjadi 4 subpopulasi, yaitu subpopulasi rentan $Susceptible\,(S)$, subpopulasi $Infected\,(I)$, subpopulasi $Aids\,Cases\,(A)$ dan subpopulasi $Treatment\,(T)$. Kemudian $S(t)$ menyatakan jumlah individu rentan pada saat t, $I(t)$ menyatakan jumlah individu terinfeksi HIV pada saat t, $A(t)$ menyatakan jumlah individu yang terkena AIDS pada saat t, $T(t)$ menyatakan jumlah individu yang menerima terapi ARV $(antiretroviral)$ pada saat t, dan $N(t)$ menyatakan jumlah total individu.

Berikut ini merupakan asumsi yang dibuat dalam pembentukan model matematika $SIAT$ pada penyebaran HIV-AIDS.

1. Populasi tertutup.

 ISBN 978-602-7905-39-9

2. Terjadi kematian alami pada semua subpopulasi.
3. Terjadi kematian akibat penyakit pada subpopulasi AIDS.
4. Terapi diterapkan pada subpopulasi AIDS.
5. Individu yang diterapi tidak dapat kembali menjadi individu yang rentan terhadap HIV-AIDS.

Berdasarkan asumsi-asumsi yang diberikan, maka untuk membangun model dinotasikan parameter-parameter yang bernilai positif sebagai berikut:

1. α menyatakan laju kelahiran.
2. μ menyatakan laju kematian secara alami.
3. β menyatakan laju penularan dari individu yang terinfeksi HIV kepada individu yang rentan.
4. γ menyatakan laju penjangkitan dari individu yang terinfeksi menjadi pengidap penyakit AIDS.
5. δ menyatakan laju kematian karena AIDS.
6. ω menyatakan laju individu dari subpopolasi A ke subpopulasi T.

Secara skematik proses penyebaran penyakit HIV-AIDS dalam suatu populasi dapat disajikan dalam diagram

Gambar 3.1. Diagram transfer proses penyebaran HIV-AIDS dengan terapi

Pada Gambar 3.1 mengilustrasikan bahwa jumlah individu pada subpopulasi S akan bertambah karena adanya kelahiran sebesar α. Diasumsikan setiap individu yang terlahir pasti akan mengalami kematian, sehingga subpopulasi S juga mengalami laju kematian alami sebesar μS yang mengakibatkan penurunan jumlah individu pada subpopulasi S. Pada suatu waktu, penurunaan jumlah individu pada subpopulasi S juga dipengaruhi oleh laju penularan dari jumlah subpopulasi I terhadap subpopulasi S sebesar $\beta S \frac{I}{N}$. Secara sistematis, dapat dibentuk persamaan laju perubahan jumlah individu pada subpopulasi S sebagai berikut:

$$\frac{dS}{dt} = \alpha - \mu S - \beta S \frac{I}{N}$$

Peningkatan jumlah individu pada subpopulasi I juga dipengaruhi oleh laju penularan dari jumlah subpopulasi I terhadap subpopulasi S sebesar $\beta S \frac{I}{N}$. Pada suatu waktu, laju kematian secara alami sebesar μI atau kematian yang bukan disebabkan oleh HIV akan terjadi pada subpopulasi I. Ketika terdapat individu yang terinfeksi HIV maka dalam kurun waktu tertentu individu tersebut akan mengalami penyakit AIDS. Laju penjangkitan sebesar γI dari subpopulasi I kepada subpopulasi A diasumsikan akan mempengaruhi penurunan jumlah individu pada subpopulasi I. Secara sistematis, dapat dibentuk persamaan laju perubahan jumlah individu pada subpopulasi I sebagai berikut:

$$\frac{dI}{dt} = \beta S \frac{I}{N} - \mu I - \gamma I$$

Laju penjangkitan sebesar γI dari subpopulasi I kepada subpopulasi A

diasumsikan akan mempengaruhi peningkatan jumlah individu pada subpopulasi A. Pada waktu tertentu, individu yang terjangkit AIDS akan mengalami kematian secara alami sebesar μA atau kematian yang bukan disebabkan oleh penyakit AIDS. Karena sampai saat ini belum ditemukannya obat untuk menyembuhkan penyakit AIDS maka akan berakibat individu yang terjangkit AIDS akan mengalami kematian yang disebabkan oleh penyakit AIDS itu sendiri. Laju kematian karena kasus AIDS sebesar δA diasumsukan akan mempengaruhi penurunan jumlah individu pada subpopulasi A. Pada waktu tertentu, penurunaan jumlah individu pada subpopulasi A juga dipengaruhi oleh adanya perlakuan terapi sebesar ωA yang diberikan kepada individu yang terjangkit penyakit AIDS. Secara sistematis, dapat dibentuk persamaan laju perubahan jumlah individu pada subpopulasi A sebagai berikut: (lanjut di atas)

$$\frac{dA}{dt} = \gamma I - \mu A - \delta A - \omega A$$

Peningkatan jumlah individu pada subpopulasi T juga dipengaruhi oleh adanya perlakuan terapi sebesar ωA yang diberikan kepada individu yang terjangkit penyakit AIDS. Pada waktu tertentu, individu yang diberikan perlakuan terapi akan mengalami kematian secara alami sebesar μT yang mengakibatkan penurunan jumlah individu pada subpopulasi T. Secara sistematis, dapat dibentuk persamaan laju perubahan jumlah individu pada subpopulasi T sebagai berikut:

$$\frac{dT}{dt} = \omega A - \mu T$$

Berdasarkan uraian tersebut, maka model penyebaran penyakit HIV-AIDS tipe $SIAT$ merupakan sistem persamaan diferensial biasa sebagai berikut : (lanjut di bawah)

$$\frac{dS}{dt} = \alpha - \mu S - \beta S \frac{I}{N}$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta S \frac{I}{N} - \mu I - \gamma I$$

$$\frac{dA}{dt} = \gamma I - \mu A - \delta A - \omega A \qquad (3.1)$$

$$\frac{dT}{dt} = \omega A - \mu T$$

nilai eigen matriks Jacobian, untuk itu perlu dibentuk matriks Jacobian dari Sistem Persamaan (3.1) yaitu matriks Jacobian di sekitar titik ekuilibrium $E_0 = (S^*, I^*, A^*, T^*)$ adalah

$$J(f(E_0)) = \begin{bmatrix} -\mu & -\frac{\beta\alpha}{\mu N} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\beta\alpha}{\mu N} - \mu - \gamma & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & -\mu-\delta-\omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega & -\mu \end{bmatrix}$$

Karena $N^* = \frac{\alpha}{\mu}$ maka,

$$J(f(E_0)) = \begin{bmatrix} -\mu & -\beta & 0 & 0 \\ 0 & \beta-\mu-\gamma & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & -\mu-\delta-\omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega & -\mu \end{bmatrix}$$

Diperoleh nilai eigen sebagai berikut:

$\lambda_{1,2} = -\mu < 0, \lambda_3 = \beta - \mu - \gamma < 0$

jika $\beta < \mu + \gamma$, dan $\lambda_4 = -\delta - \mu - \omega < 0$. Dari nilai eigen yang diperoleh, dapat dilihat bahwa $\lambda_{1,2,4} < 0$. Untuk nilai eigen $\lambda_3 < 0$ memiliki nilai negatif jika $\beta < \mu + \gamma$. Jadi disimpulkan bahwa titik ekuilibrium E_0 stabil asimtotik lokal jika $\beta < \mu + \gamma$.

5. Analisis Kestabilan Titik Ekuilibrium Endemik

Kestabilan titik ekuilibrium endemik dapat ditentukan berdasarkan teorema berikut: (lanjut di atas)

Teorema 3.1

Didefinisikan

$$R_0 = \frac{\alpha\beta}{\mu^2 \mathrm{N} + \mu\gamma N}$$

Titik ekuilibrium endemik $E_1 = (S^{**}, I^{**}, A^{**}, T^{**})$ bersifat stabil asimtotik lokal jika $R_0 > 1$.

Bukti :

Kestabilan titik ekuilibrium endemik dapat ditentukan dengan menganalisis nilai eigen matriks Jacobian di sekitar titik ekuilibrium endemik $J(E_1)$. Matriks $J(E_1)$ diperoleh dengan mensubstitusikan titik ekuilibrium endemik $E_1 = (S^{**}, I^{**}, A^{**})$ sehingga diperoleh hasil sebagai berikut :

$$J(f(E_1)) = \begin{bmatrix} -\mu - \frac{\beta I^{**}}{N} & -\frac{\beta S^{**}}{N} & 0 \\ \frac{\beta I^{**}}{N} & \frac{\beta S^{**}}{N} - \mu - \gamma & 0 \\ 0 & \gamma & -\mu-\delta-\omega \end{bmatrix}$$

$$J(f(E_1)) = \begin{bmatrix} -\mu + \frac{N\gamma\mu + N\mu^2 - \alpha\beta}{(\gamma+\mu)N} & -\mu-\gamma & 0 \\ -\frac{N\gamma\mu + N\mu^2 - \alpha\beta}{(\gamma+\mu)N} & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & -\mu-\delta- \end{bmatrix}$$

Nilai eigen matriks $J(E_1)$ ditentukan sebagai berikut : (lanjutan di bawah)

$$\det(\lambda I - J(f(E_1))) = 0$$

$$\Leftrightarrow \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\mu + \frac{N\gamma\mu + N\mu^2 - \alpha\beta}{(\gamma+\mu)N} & -\mu-\gamma & 0 \\ -\frac{N\gamma\mu + N\mu^2 - \alpha\beta}{(\gamma+\mu)N} & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & -\mu-\delta-\omega \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \det\left(\begin{bmatrix} \lambda + \mu - \frac{N\gamma\mu + N\mu^2 - \alpha\beta}{(\gamma+\mu)N} & \gamma+\mu & 0 \\ \frac{N\gamma\mu + N\mu^2 - \alpha\beta}{(\gamma+\mu)N} & \lambda & 0 \\ 0 & -\gamma & \lambda+\delta+\mu+\omega \end{bmatrix}\right) = 0$$

 ISBN 978-602-7905-39-9

dengan menggunakan ekspansi kofaktor kolom pertama maka persamaan karakteristiknya adalah

$$(\lambda + Y)(\lambda^2 + (\mu - X)\lambda) - (\gamma + \mu)X + 0 = 0$$

dengan

$$X = \frac{N\gamma\mu + N\mu^2 - \alpha\beta}{(\gamma + \mu)N}$$

$$Y = \delta + \mu + \omega$$

Dari Persamaan (3.3), diperoleh

$$\lambda + Y = 0$$

dan

$$\lambda^2 + (\mu - X)\lambda - (\gamma + \mu)X = 0$$

$$\lambda + Y = 0$$
$$\lambda = -Y$$

Sehingga diperoleh λ bernilai negatif.

Persamaan $(3.3a)$,diperoleh :

$$\lambda^2 + (\mu - X)\lambda - (\gamma + \mu)X = 0$$

Karena hasilnya berbentuk polinomial, maka untuk melihat titik kestabilan, dapat menggunakan Kriteria Routh-Hurwitz.

$$\lambda^2 + \lambda a_1 + a_2 = 0$$

Misalkan

$$a_1 = (\mu - X),\ a_2 = -(\gamma + \mu)X$$

Untuk menyatakan bahwa titik ekulibrium E_1 stabil asimtotik lokal, maka harus dibuktikan bahwa semua akar Persamaan (3.3) bernilai negatif. Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz, semua akar Persamaan (3.3) bernilai negatif jika dipenuhi $a_1 > 0$ dan $a_2 > 0$.

Akan dibuktikan bahwa $a_1 > 0$

$$a_1 > 0$$
$$\mu - X > 0$$
$$\mu - (1 - R_0)\mu > 0 \qquad (3.3)$$

Jadi, $\mu - (1 - R_0)\mu > 0$ jika $R_0 > 1$

Akan dibuktikan bahwa $a_2 > 0$

$$a_2 > 0$$
$$-(\gamma + \mu)X > 0$$
$$-(\gamma + \mu)(1 - R_0)\mu > 0$$

Jadi, $-(\gamma + \mu)(1 - R_0)\mu > 0$ jika $R_0 >$ 1. $(3.3a)$

Dengan kata lain, syarat $a_1, a_2 > 0$ terpenuhi.

Jadi sistem di sekitar titik ekuilibrium E_1 $(33b)$

Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan dapat disimpulkan bahwa

1. Model matematika *SIAT* pada penyebaran HIV-AIDS adalah sebagai berikut:

$$\frac{dS}{dt} = \alpha - \mu S - \beta S \frac{I}{N}$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta S \frac{I}{N} - \mu I - \gamma I$$

$$\frac{dA}{dt} = \gamma I - \mu A - \delta A - \omega A$$

$$\frac{dT}{dt} = \omega A - \mu T$$

dengan $\frac{dS}{dt}, \frac{dI}{dt}, \frac{dA}{dt}, \frac{dT}{dt}$ menyatakan laju perubahan jumlah individu pada tiap subpopulasi persatuan waktu t dan $N = S + I + A + T$, dengan $S, I, A, T \geq 0$, untuk setiap $t \geq t_0$.

2. Model matematika *SIAT* pada penyebaran HIV-AIDS mempunya dua titik ekuilibrium yaitu titik ekuilibrium non endemik (bebas penyakit) dan titik

ekuilibrium endemik. Titik ekuilibrium non endemik E_0 yaitu $(S^*, I^*, A^*, T^*) = (\frac{\pi}{\mu}, 0,0,0)$. Sedangkan titik ekuilibrium endemik E_1 yaitu $(S^{**}, I^{**}, A^{**}, T^{**}) = (\frac{(\mu+\gamma)N}{\beta}, \frac{-\mu^2 N - \mu\gamma N + \alpha\beta}{\beta(\mu+\gamma)}, \frac{\gamma(-\mu\gamma N - \mu^2 N + \alpha\beta)}{[illegible]}, \frac{\alpha\gamma(-\mu\gamma N - \mu^2 N + \alpha\beta)}{[illegible]})$.

3. Nilai bilangan reproduksi dasar (R_0) untuk model matematika *SIAT* pada penyebaran HIV-AIDS yaitu

$$R_0 = \frac{\alpha\beta}{\mu^2 \mathrm{N} + \mu\gamma N}$$

4. Berdasarkan hasil analisis kestabilan titik ekuliblibrium non endemik E_0 stabil asimtotik lokal jika $\beta < \mu + \gamma$ dan titik ekuliblibrium endemik E_1 stabil asimtotik lokal jika $R_0 > 1$.

Haryanto, D., Kusumastuti, N., & Prihandono, B. 2015. Pemodelan Matematika dan Analisis Kestabilan Model pada Penyebaran HIV-AIDS. *Buletin Ilmiah Mat. Stat. dan*

ISBN 978-602-7905-39-9

Daftar Pustaka

Anton, H., & Rorres, C. 2004. *Aljabar Linear Elementer Versi Aplikasi (Edisi Kedelapan)*. Jakarta: Erlangga.

Bronson, R., & Costa, G. B. 2006. *Schaum's Outline Of Diferential Equations Third Edition*. USA: McGraw-Hill.

Driessche, P. V., & Watmough, J. 2002. Reproduction numbers and sub- threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission. *Mathematical Biosciences*, 29-48.

Terapannya (Bimaster), 101-110.

Olsder, G. J., & van der Woude, J. W. 1994. *Mathematical Systems Theory*. Netherland: Deflt University Press.

Perko, L. 2001. *Differential Equations and Dynamical System Third Edition*. New York: Spinger-Verlag.

Pusat Data dan Informasi. 2006. *Situasi HIV- AIDS di Indonesia*. Jakarta: Departemen Kesehatan RI.

Pusat Data dan Informasi. 2016. *Situasi Penyakit HIV AIDS di Indonesia*. Jakarta Selatan: Kementerian Kesehatan RI.

Pusat Informasi dan Hubungan Masyarakat. 2009. *Pendidikan Pencegahan HIV*. Jakarta: Komisi Nasional Indonesia Untuk UNESCO.

Rosen, H. K. 2012. *Discrete Mathematics and Its Aplications Sevent Edition*. Americas New York: The McGraw- Hill Companies.

Varbeg, D., Purcell, E. J., & Rogdin, S. E. 2007. *Calculus Ninth Edition*. New York, USA: Prentice Hall