



## **ANALISIS MODEL MATEMATIKA SITA PADA PENYEBARAN PENYAKIT HIV/AIDS DENGAN PENGARUH TERAPI PADA POPULASI TERTUTUP**

**ABRAHAM DAN TIKU TANDIANGNGA**

*Dosen Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Cenderawasih Jayapura*  
*E-mail: m1cb\_buper@yahoo.co.id*

### **ABSTRACT**

*Human Immunodeficiency Virus (HIV) is a virus that causes Acquired Immunodeficiency Syndrome (AIDS). This virus causes a decrease in human immune function. The absence of a cure for this disease has resulted in each patient being only given medical therapy which aims to slow down the proliferation of the virus in the patient's body. One of the ways that HIV / AIDS sufferers can do a therapeutic treatment known as ARV therapy. ARV therapy can help slow down the progression of the virus that spreads in the body. Although it has not been able to cure completely, ARV therapy reduces mortality, morbidity, and improves the quality of life for people living with HIV / AIDS (ODHA).*

*In this research, explaining the model of the spread of HIV-AIDS in a closed population with therapeutic treatment, which divides the human population into five sub-populations, namely Susceptible (S) is a group that is susceptible to HIV infection, Infected (I) is a group infected with HIV, Treatment1 ( $T_1$ ) is the group taking monotherapy and first-line therapy, Treatment2 ( $T_2$ ) is the group taking second-line therapy, and Aids cases (A) is the group with AIDS. Therapeutic treatment is carried out by individuals infected with HIV and individuals with AIDS. From the model formed, two equilibrium points are obtained, namely the non-endemic equilibrium point  $E_1$  and the endemic equilibrium point  $E_2$ .*

*From the results of the stability analysis, it is obtained that the non-endemic equilibrium point  $E_1$  is asymptotically stable when  $R_0 < 1$ . This shows that there is no virus in the population, so that no individual is infected with HIV and no individual is infected with AIDS. The endemic equilibrium point  $E_2$  is asymptotically stable when  $R_0 > 1$ . This shows that the potential for the spread of HIV remains because the virus does not disappear in the population, so that for a long time there will still be individuals who are infected with HIV and individuals who have AIDS.*

*Keywords: SITA model, HIV-AIDS, equilibrium point, basic reproduction number*

## PENDAHULUAN

*Human Immunodeficiency Virus* (HIV) merupakan retrovirus yang menjangkiti sel-sel kekebalan tubuh manusia (terutama CD4 positive T-sel dan *macrophages*-komponen-komponen utama sistem kekebalan sel), dan menghancurkan atau mengganggu fungsinya. Infeksi ini mengakibatkan terjadinya penurunan sistem kekebalan yang terus menerus, yang akan mengakibatkan defisiensi kekebalan tubuh. Sedangkan *Acquired Immunodeficiency Syndrome* (AIDS) menggambarkan berbagai gejala dan infeksi yang terkait dengan menurunnya sistem kekebalan tubuh. Sistem dianggap defisien ketika sistem tersebut tidak dapat lagi menjalankan fungsinya memerangi infeksi dan penyakit-penyakit. Orang yang kekebalan tubuhnya defisien (*immunodeficient*) menjadi lebih rentan terhadap berbagai ragam infeksi, yang sebagian besar jarang menjangkiti orang yang tidak mengalami defisiensi kekebalan. HIV/AIDS merupakan salah satu masalah kesehatan masyarakat yang memerlukan perhatian khusus, hal ini dapat dilihat dari tingginya jumlah kasus HIV/AIDS yang tiap tahunnya meningkat tanpa diimbangi dengan pertumbuhan populasi yang terjadi.

HIV yang menginfeksi sel CD4 akan berkembang biak. Tahapan perkembangan HIV di dalam tubuh manusia dibagi dalam empat tahap, yaitu: periode jendela, tanpa gejala, muncul gejala, dan AIDS. Perkembangan HIV ini dapat dihambat dengan memakai terapi antiretroviral (ART), yaitu mengkonsumsi obat antiretroviral (ARV) dengan tepat waktu

dan terus-menerus untuk menurunkan jumlah virus dalam darah hingga virus tidak terdeteksi. Pada umumnya, terapi antiretroviral diawali dengan mengkonsumsi satu jenis ARV (monoterapi). Hal ini dilakukan oleh individu yang terinfeksi HIV dan belum terjangkit AIDS. Kadar obat dalam darah mempengaruhi keberhasilan terapi. Artinya jika kadar obat dalam darah terlalu rendah maka virus dapat resistan (kebal), akibatnya terapi akan gagal. Jika terapi dengan satu jenis ARV gagal, maka terapi bisa dilanjutkan dengan menggunakan kombinasi tiga ARV. Terapi dengan kombinasi tiga ARV dibagi menjadi dua, yaitu terapi lini pertama dan terapi lini kedua. Manfaat yang diperoleh dari memakai ART, antara lain: menghambat perkembangan HIV, meningkatkan jumlah sel CD4, menekan (mengurangi) jumlah virus dalam darah, dan memulihkan kondisi fisik sehingga orang dengan HIV/AIDS (ODHA) merasa lebih baik.

Dengan melihat proses penularan virus HIV yang saat ini, masih lebih dominan terhadap kelompok usia produktif yaitu dengan pola perilaku yang berisiko seperti seks bebas yang tidak aman dan penggunaan narkoba melalui jarum suntik, dengan hubungan seksual (baik heteroseksual maupun homoseksual) sangat mendominasi yaitu mencapai 60%. Sedangkan melalui jarum suntik sekitar 30%, dan sebagian kecil lainnya yang tertular melalui proses ibu dan anak (kehamilan) dan transfusi darah. Di Indonesia, kecenderungan penularan infeksi HIV di seluruh provinsi prioritas hampir sama.. Sejak Tahun 1987 sampai

dengan Desember 2017, HIV/AIDS sudah tersebar di 421 dari 514 kabupaten/kota diseluruh provinsi yang ada di Indonesia dengan jumlah manusia yang terinfeksi HIV sebanyak 280.623 orang dan jumlah manusia yang terjangkit AIDS sebanyak 102.667 orang (Kemenkes, 2018). Penularan HIV saat ini sudah terjadi lebih awal, di mana kelompok usia produktif (15-29 tahun) banyak dilaporkan telah terinfeksi dan menderita AIDS.

Pada bidang kesehatan, model matematika dapat digunakan untuk mengetahui bagaimana penyebaran suatu penyakit menular maupun tidak menular. Selain itu dapat juga digunakan untuk mengetahui jumlah penderita suatu penyakit, baik yang berupa endemik maupun non-endemik. Model penyebaran penyakit yang bersifat endemik disebut sebagai model epidemik. Model epidemik SIR dikenalkan oleh Kermack dan McKendrick pada tahun 1927 dalam buku "A Contribution to The Mathematical Theory of Epidemics" (Castellini dan Romanelli, 2007). Pada perkembangannya model ini terus dimodifikasi dengan asumsi yang berbeda beda agar dapat menjelaskan berbagai fenomena penyakit yang makin kompleks.

Salah satu pengembangan dari model epidemik *SIR* adalah Model epidemik *SEIR*. Model epidemik *SEIR* adalah model yang terdiri dari empat kompartemen yaitu *Susceptible* (*S*) menyatakan banyaknya individu yang rentan terhadap penyakit, *Exposed* (*E*) menyatakan banyaknya individu yang telah terinfeksi tetapi belum tampak tanda-tanda menderita penyakit, *Infected* (*I*)

menyatakan banyaknya individu yang terinfeksi penyakit, dan *Recovered* (*R*) menyatakan banyaknya individu yang sembuh dari penyakit. Dalam perkembangannya, model epidemik ini dapat dikembangkan atau dimodifikasi disesuaikan dengan jenis penyakit yang akan diteliti perkembangannya.

Pada model ini akan terbagi dalam 4 kompartemen yaitu kompartemen yang sehat atau *Susceptible* (*S*), kompartemen yang terinfeksi virus atau *Infected* (*I*), kompartemen yang mendapatkan terapi obat atau *Treatment* (*T*), dan kompartemen yang terpapar kasus AIDA atau *Aids cases* (*A*). Adanya pemberian terapi obat yang dilakukan pada kompartemen yang terinfeksi virus Artinya jumlah individu pada kompartemen *I* akan meningkat karena pengaruh tingkat penularan kompartemen *I* terhadap kompartemen *S*. Dengan memakai terapi antiretroviral, individu yang terinfeksi HIV dapat memiliki waktu yang lebih lama sebelum terjangkit AIDS. Oleh karena itu, jumlah individu pada kompartemen *T* akan meningkat karena pengaruh laju perlakuan terapi dari individu-individu pada kompartemen *I*. Dalam kurun waktu tertentu individu-individu yang memakai terapi pada akhirnya akan terjangkit AIDS, yang menyebabkan jumlah individu pada kompartemen *A* meningkat.

## HASIL DAN ANALISIS

1. **Membangun Model Penyebaran HIV-AIDS Pada Populasi Tertutup dengan Perlakuan Terapi**

Pada model *SITA* populasi dibagi menjadi 4 subpopulasi, yaitu : subpopulasi rentan atau *Susceptible* ( $S$ ), subpopulasi terinfeksi virus HIV atau *Infected* ( $I$ ), subpopulasi yang melakukan terapi/pengobatan atau *Treatment* ( $T$ ) dan subpopulasi yang telah terinfeksi penyakit AIDS atau *Aids Cases* ( $A$ ). Kemudian  $S(t)$  menyatakan jumlah individu rentan pada saat  $t$ ,  $I(t)$  menyatakan jumlah individu terinfeksi HIV pada saat  $t$ ,  $T(t)$  menyatakan jumlah individu yang menerima terapi ARV (*antiretroviral*) pada saat  $t$ ,  $A(t)$  menyatakan jumlah individu yang terkena AIDS pada saat  $t$ , dan  $N(t)$  menyatakan jumlah total individu.

Berikut ini beberapa asumsi yang digunakan dalam pembentukan model matematika *SITA* terhadap penyebaran HIV-AIDS.

#### Asumsi-asumsi model

- Populasi manusia dikelompokkan dalam lima sub-populasi, yaitu *susceptible* ( $S$ ), *infected* ( $I$ ), *treatment1* ( $T_1$ ), *treatment2* ( $T_2$ ), *aids cases* ( $A$ ).
- Populasi bersifat tertutup, artinya jumlah individu dalam populasi dipengaruhi oleh kelahiran (*recruitment*) dan kematian.
- Sub-populasi  $S$  berisi individu-individu yang rentan terinfeksi HIV. Sub-populasi  $I$  berisi individu-individu yang terinfeksi HIV. Sub-populasi  $T_1$  berisi individu-individu yang terinfeksi HIV yang memakai monoterapi dan terapi lini pertama. Sub-populasi  $T_2$  berisi individu-individu yang terinfeksi

HIV yang memakai terapi lini kedua. Sub-populasi  $A$  berisi individu-individu yang terinfeksi AIDS. Pemakaian terapi lini kedua dari individu pada sub-populasi  $A$  bertujuan agar pulih dari infeksi oportunistik.

- Adanya kontak dari sub-populasi  $I$  terhadap sub-populasi  $S$ .
- Bayi yang baru lahir tidak terinfeksi HIV/AIDS.
- Tidak ada individu yang hamil pada sub-populasi  $A$ .
- Kematian alami terjadi di setiap sub-populasi sedangkan kematian karena AIDS terjadi hanya di sub-populasi  $A$ .

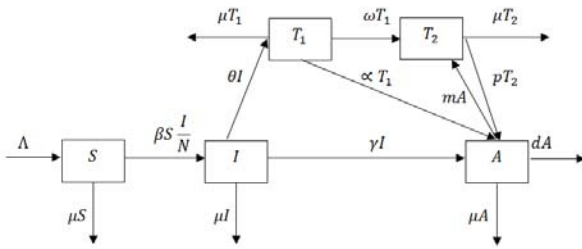
Berdasarkan asumsi-asumsi model, maka untuk membangun model dinotasikan parameter-parameter yang bernilai positif sebagai berikut :

- $\Lambda$  : laju *recruitment* pada sub-populasi *susceptible*.
- $\mu$  : laju kematian alami.
- $\beta$  : tingkat penularan dari individu-individu yang terinfeksi HIV terhadap individu-individu yang rentan.
- $\theta$  : laju perlakuan monoterapi dan terapi lini pertama dari individu-individu yang terinfeksi HIV.
- $\gamma$  : laju transisi dari individu yang terinfeksi HIV menjadi pengidap AIDS.
- $\omega$  : laju perlakuan terapi lini kedua dari individu-individu yang memakai monoterapi dan terapi lini pertama.
- $\alpha$  : laju transisi dari individu yang memakai monoterapi dan terapi lini pertama menjadi pengidap AIDS.
- $p$  : laju transisi dari individu-individu yang memakai terapi lini kedua menjadi pengidap AIDS.

$m$  : laju perlakuan terapi dari individu-individu yang terjangkit AIDS terhadap terapi lini kedua.

$d$  : laju kematian yang disebabkan oleh AIDS.

Secara skematik proses penyebaran HIV-AIDS dalam populasi tertutup dapat direpresentasikan pada diagram transfer pada gambar 1.



Gambar 1. Diagram tranfer

Berdasarkan asumsi dan hubungan antara variabel serta parameter di atas, maka diperoleh Sistem Persamaan diferensial sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= \Lambda - \beta S \frac{I}{N} - \mu S \\ \frac{di}{dt} &= \beta S \frac{I}{N} - \theta I - \gamma I - \mu I \\ \frac{dT_1}{dt} &= \theta I - \omega T_1 - \alpha T_1 - \mu T_1 \\ \frac{dT_2}{dt} &= \omega T_1 + mA - pT_2 - \mu T_2 \\ \frac{dA}{dt} &= \gamma I + \alpha T_1 + pT_2 - mA - \mu A - dA \end{aligned} \quad (1.1)$$

## 2. Penentuan Titik Ekuilibrium

Titik ekuilibrium non endemik merupakan titik tetap yang tidak berubah terhadap waktu dalam keadaan bebas virus. Titik ekuilibrium non endemik dinotasikan dengan  $E_1 = (S^*, I^*, T_1^*, T_2^*, A^*)$ , dan diperoleh dengan menggunakan Sistem Persamaan (1.1) dengan syarat  $\frac{ds}{dt} = 0$ ,  $\frac{di}{dt} = 0$ ,  $\frac{dT_1}{dt} = 0$ ,  $\frac{dT_2}{dt} = 0$ ,  $\frac{dA}{dt} = 0$ ,  $I = 0$ ,  $A = 0$ , sehingga Sistem Persamaan (1.1) menjadi

$$\Lambda - \beta S \frac{I}{N} - \mu S = 0 \quad (1.2)$$

$$\beta S \frac{I}{N} - \theta I - \gamma I - \mu I = 0 \quad (1.3)$$

$$\theta I - \omega T_1 - \alpha T_1 - \mu T_1 = 0 \quad (1.4)$$

$$\omega T_1 + mA - pT_2 - \mu T_2 = 0 \quad (1.5)$$

$$\gamma I + \alpha T_1 + pT_2 - mA - \mu A - dA = 0 \quad (1.6)$$

Dari Persamaan (1.3), diperoleh :

$$\left(\frac{\beta S}{N} - \theta - \gamma - \mu\right) I = 0$$

karena  $\frac{\beta S}{N} - \theta - \gamma - \mu \neq 0$ , maka

$$I = 0, \text{ sebagai } I^*$$

Titik ekuilibrium non endemik diperoleh saat di dalam populasi tidak terdapat virus, sehingga  $I = 0$ . Apabila  $I \neq 0$ , maka dari persamaan di atas  $\frac{\beta S}{N} - \theta - \gamma - \mu = 0$ .

Sehingga diperoleh titik ekuilibrium non endemik dan endemik adalah  $E_1 = \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0, 0, 0\right)$

$E_2 = (S^{**}, I^{**}, T_1^{**}, T_2^{**}, A^{**})$ , dengan

$$S^{**} = \frac{N(\theta + \gamma + \mu)}{\beta} \quad I^{**} = \frac{\mu N}{\beta} (R_0 - 1)$$

$$T_1^{**} = \frac{\theta \mu N}{\beta(\omega + \alpha + \mu)} (R_0 - 1)$$

$$T_2^{**} = (R_0 -$$

$$1) \mu N \left( \frac{\gamma m(\omega + \alpha + \mu) + \alpha \theta m + \omega \theta(\mu + d + m)}{\beta(\omega + \alpha + \mu)((p + \mu)(\mu + d + m) - pm)} \right)$$

$$A^{**} = (R_0 -$$

$$1) \mu N \left( \frac{\omega \theta p + \gamma(\omega + \alpha + \mu)(p + \mu) + \alpha \theta(p + \mu)}{\beta(\omega + \alpha + \mu)((p + \mu)(\mu + d + m) - pm)} \right)$$

## 3. Penentuan Bilangan Reproduksi Dasar $R_0$

Bilangan reproduksi dasar dicari dengan menggunakan metode matriks generasi berikutnya. Pada Sistem Persamaan (1.1), yang merupakan sub-populasi terinfeksi adalah *infected*, *treatment1*, *treatment2*, *aids cases*. Bilangan reproduksi dasar diperoleh melalui matriks laju infeksi baru, dan matriks selisih laju perpindahan antara individu yang keluar dengan individu

yang masuk pada sub-populasi yang terinfeksi.

Matriks laju infeksi baru yang menyatakan proporsi terinfeksi dari sub-populasi  $I, T_1, T_2, A$  diperoleh dari Sistem Persamaan (1.1), sehingga diperoleh nilai reproduksi dasar ( $R_0$ ) adalah

$$R_0 = \frac{\beta S}{N(\theta + \gamma + \mu)} > 1$$

Dengan syarat perlu non endemik, yaitu  $I = 0$ , maka berdasarkan titik ekuilibrium non endemik,  $S = \frac{\Lambda}{\mu}$  disubstitusikan sehingga bilangan reproduksi dasar menjadi

$$R_0 = \frac{\beta \Lambda}{\mu N(\theta + \gamma + \mu)} \quad (1.7)$$

#### 4. Analisis Kestabilan Titik Ekuilibrium Endemik

Matriks Jacobian di titik ekuilibrium  $E_2 = (S^{**}, I^{**}, T_1^{**}, T_2^{**}, A^{**})$  adalah

$$J(f(E_2)) = \begin{bmatrix} -\mu((R_0 - 1) + 1) & -(\theta + \gamma + \mu) & 0 & 0 & 0 \\ \mu(R_0 - 1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \theta & -(\omega + \alpha + \mu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega & -(p + \mu) & m \\ 0 & \gamma & \alpha & p & -(\mu + d + m) \end{bmatrix}$$

Ditentukan nilai eigen matriks  $J(f(E_2))$  dengan  $\det(\lambda I - J(f(E_2))) = 0$  :

$$\begin{vmatrix} \lambda + \mu((R_0 - 1) + 1) & (\theta + \gamma + \mu) & 0 & 0 & 0 \\ -\mu(R_0 - 1) & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\theta & \lambda + (\omega + \alpha + \mu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega & \lambda + (p + \mu) & -m \\ 0 & -\gamma & -\alpha & -p & \lambda + (\mu + d + m) \end{vmatrix} = 0$$

Diperoleh Persamaan berikut :

$$\begin{aligned} & (\lambda + (\mu + d + m))(\lambda + (p + \mu)) \\ & \left( \left( \lambda + (\omega + \alpha + \mu) \right) \left( \lambda + \mu((R_0 - 1) + 1) \right) + \mu(R_0 - 1)(\theta + \gamma + \mu) \right) + \\ & m(-p)(\lambda + (\omega + \alpha + \mu)) \left( \lambda + \mu((R_0 - 1) + 1) \right) + \mu(R_0 - 1)(\theta + \gamma + \mu) = 0 \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh

$$(\lambda + (\omega + \alpha + \mu)) \left( \lambda + \mu((R_0 - 1) + 1) \right) + \mu(R_0 - 1)(\theta + \gamma + \mu) = 0 \quad (1.8)$$

$$(\lambda + (\mu + d + m))(\lambda + (p + \mu)) - pm = 0 \quad (1.9)$$

Dari Persamaan (1.8), diperoleh :

$$\begin{aligned} & (\lambda_1 + (\omega + \alpha + \mu)) = 0 \text{ jika dan hanya jika } \lambda_1 = -(\omega + \alpha + \mu), \text{ sehingga} \\ & \lambda_1 = -(\omega + \alpha + \mu) < 0. \end{aligned}$$

Selanjutnya,

$$\begin{aligned} \lambda(\lambda + \mu(R_0 - 1) + 1) + \mu(R_0 - 1)(\theta + \gamma + \mu) &= 0 \\ \lambda(\lambda + \mu(R_0 - 1) + \mu) + \mu(R_0 - 1)(\theta + \gamma + \mu) &= 0 \\ \lambda^2 + \mu R_0 \lambda + \mu(\theta + \gamma + \mu)(R_0 - 1) &= 0 \end{aligned} \quad (1.10)$$

dengan

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, \quad a_1 = \mu R_0 \\ a_2 &= \mu(R_0 - 1)(\theta + \gamma + \mu) = \mu \left( \frac{\beta \Lambda}{\mu N(\theta + \gamma + \mu)} - 1 \right) (\theta + \gamma + \mu) \\ &= \frac{\beta \Lambda}{N} - \mu(\theta + \gamma + \mu) \end{aligned} \quad (1.11)$$

Persamaan (1.10) mempunyai semua nilai eigen yang bernilai negatif jika dan hanya jika  $a_1, a_2 > 0$ . Oleh karena itu, dengan syarat bahwa jika  $a_2 > 0$ , maka semua nilai eigen dari Persamaan (1.11) yaitu  $\lambda_2$  dan  $\lambda_3$  bernilai negatif.

Jika  $R_0 > 1$  merupakan syarat cukup untuk kestabilan titik ekuilibrium endemik maka titik ekuilibrium  $E_2$  stabil asimtotik lokal jika dan hanya jika semua nilai eigen matriks  $J(f(E_2))$  bernilai negatif.

## KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan dapat disimpulkan bahwa

1. Model yang terbentuk dari penyebaran HIV-AIDS pada populasi tertutup dengan perlakuan terapi berupa sistem persamaan diferensial biasa. Model yang diperoleh sebagai berikut

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \Lambda - \beta S \frac{I}{N} - \mu S \\ \frac{dI}{dt} &= \beta S \frac{I}{N} - \theta I - \gamma I - \mu I \\ \frac{dT_1}{dt} &= \theta I - \omega T_1 - \alpha T_1 - \mu T_1 \\ \frac{dT_2}{dt} &= \omega T_1 + mA - pT_2 - \mu T_2 \end{aligned}$$

$$R_0 = \frac{\beta \Lambda}{\mu N(\theta + \gamma + \mu)} > 1$$

$$\frac{\beta \Lambda}{N} - \mu(\theta + \gamma + \mu) > 0$$

Dengan kata lain, syarat  $a_2 > 0$  terpenuhi. Maka  $\lambda_2$  dan  $\lambda_3$  bernilai negatif. Untuk semua nilai eigen dari Persamaan (1.9) yaitu  $\lambda_4$  dan  $\lambda_5$  bernilai negatif. Artinya, semua nilai eigen matriks  $J(f(E_2))$  bernilai negatif. Jadi titik ekuilibrium  $E_2$  stabil asimtotik lokal.

$$\frac{dA}{dt} = \gamma I + \alpha T_1 + pT_2 - mA - \mu A - dA$$

2. a) Dari model penyebaran HIV-AIDS pada populasi tertutup dengan perlakuan terapi, diperoleh titik ekuilibrium non endemik dengan syarat  $I = 0, A = 0$  adalah  $E_1 = (S^*, I^*, T_1^*, T_2^*, A^*) = \left( \frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0, 0, 0 \right)$  dan titik ekuilibrium endemik dengan syarat  $R_0 > 1$  adalah  $E_2 = (S^{**}, I^{**}, T_1^{**}, T_2^{**}, A^{**})$ , dengan

$$S^{**} = \frac{N(\theta + \gamma + \mu)}{\beta}, \quad I^{**} = \frac{\mu N}{\beta} (R_0 - 1),$$

$$T_1^{**} = \frac{\theta \mu N}{\beta(\omega + \alpha + \mu)} (R_0 - 1),$$

$$T_2^{**} = (R_0 - 1)\mu N \left( \frac{\gamma m(\omega + \alpha + \mu) + \alpha \theta m + \omega \theta (\mu + d + m)}{\beta(\omega + \alpha + \mu)((p + \mu)(\mu + d + m) - pm)} \right),$$

$$A^{**} = (R_0 - 1)\mu N \left( \frac{\omega \theta p + \gamma(\omega + \alpha + \mu)(p + \mu) + \alpha \theta (p + \mu)}{\beta(\omega + \alpha + \mu)((p + \mu)(\mu + d + m) - pm)} \right).$$

- b) Dari hasil analisis model penyebaran HIV-AIDS pada populasi tertutup dengan perlakuan terapi, titik ekuilibrium non endemik  $E_1$  stabil asimtotik lokal saat  $R_0 < 1$  dan titik ekuilibrium endemik  $E_2$  stabil asimtotik lokal saat  $R_0 > 1$ .

#### DAFTAR PUSTAKA

- Anton, H., & Rorres, C. 2004. *Aljabar Linear Elementer Versi Aplikasi (Edisi Kedelapan)*. Jakarta: Erlangga.
- Bronson, R., & Costa, G. B. 2006. *Schaum's Outline Of Differential Equations Third Edition*. USA: McGraw-Hill.
- Driessche, P. V., & Watmough, J. 2002. Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission. *Mathematical Biosciences*, 29-48.
- Haryanto, D., Kusumastuti, N., & Prihandono, B. 2015. Pemodelan Matematika dan Analisis Kestabilan Model pada Penyebaran HIV-AIDS. *Buletin Ilmiah Mat. Stat. dan Terapannya (Bimaster)*, 101-110.
- Olsder, G. J., & van der Woude, J. W. 1994. *Mathematical Systems Theory*. Netherland: Delft University Press.
- Perko, L. 2001. *Differential Equations and Dynamical System Third Edition*. New York: Springer-Verlag.
- Pusat Data dan Informasi. 2006. *Situasi HIV-AIDS di Indonesia*. Jakarta: Departemen Kesehatan RI.
- Pusat Data dan Informasi. 2016. *Situasi Penyakit HIV AIDS di Indonesia*. Jakarta Selatan: Kementerian Kesehatan RI.
- Pusat Informasi dan Hubungan Masyarakat. 2009. *Pendidikan Pencegahan HIV*. Jakarta: Komisi Nasional Indonesia Untuk UNESCO.
- Rosen, H. K. 2012. *Discrete Mathematics and Its Applications Seventh Edition*. Americas New York: The McGraw-Hill Companies.
- Varbeg, D., Purcell, E. J., & Rogdin, S. E. 2007. *Calculus Ninth Edition*. New York, USA: Prentice Hall.